

1. Матрица ұғымы және анықтауыштың қасиеттері

(3)

Мысалы. 1) $A = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = 2 \cdot 7 + 5 \cdot 4 = -6;$

2) $B = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 + (-2 \cdot 4) = -5;$

Мысал-1: Берілген A және B матрицаларын қосыңдар .

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 3 & -1 & 4 \\ 8 & 10 & 11 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 1 \\ 2 & -4 & 5 \\ 9 & -5 & 7 \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 2+8 & 5+4 & 3+1 \\ 3+2 & (-1+(-4)) & 4+5 \\ 8+9 & 10+(-5) & 11+7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 9 & 4 \\ 5 & -5 & 9 \\ 17 & 5 & 18 \end{pmatrix}$$

Ажәне B матрицаларын көбейту үшін бірінші матрица-ның баған элементтерін екінші матрицаның сәйкес жол элементтерінің санына көбейтеміз. Ол үшін бірінші матрицаның баған саны екінші матрицаның жол санына тең болуы керек.

Мысал-2: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ және $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$$A \times B = \begin{pmatrix} 4+8+1 & 1+4+2 & 1+0+1 \\ 8+4+2 & 2+2+4 & 2+0+2 \\ 4+8+3 & 1+4+6 & 1+0+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 7 & 2 \\ 14 & 8 & 4 \\ 15 & 11 & 4 \end{pmatrix}$$

Анықтама: Егер $AB = BA = E$, (E -бірлік матрица) теңдіктері орындалатындай B матрицасы бар болса, онда ол A матрицасына кері матрица деп аталады.

Анықтама: Анықтауышы нөлге тең емес квадрат матрица *нұқсансыз* (өзгеше емес), ал анықтауышы нөлге тең квадрат матрица *нұқсанды* (өзгеше) деп аталады.

Мысал-3: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ матрицасына кері матрицаны табу керек

болсын. Ол үшін берілген матрицаның анықтауышын тауып аламыз, яғни:

$$\det = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \text{ болғандықтан кері матрица бар. Енді берілген}$$

матрицаның алгебралық анықтауыштарын $A_{11} = 4$; $A_{12} = -3$; $A_{21} = -2$; $A_{22} = 1$ тауып, оны транспонирлеп A^T матрицасын аламыз.

$$A^T = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Кері матрицаның қасиеттеріне сүйеніп $(A^{-1}) \times A = E$, шыққан матрицаны тексеруге болады:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+3 & 1-1 \\ -6+6 & 3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Мысал-5: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \\ 5 & 3 & 7 \end{pmatrix}$ матрицасының рангісін табу керек

болсын. 1-ші және 2-ші бағандардың орнын алмастырып, содан - соң 1-ші жолдары (-4)-ке және (-5)-ке көбейтіп, сәйкес 2-ші және 3-ші жолдарға қоссақ төмендегі матрицаны аламыз:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \\ 5 & 3 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

Түрлендіруді жалғастыра береміз, енді 2-ші жолды (-1) - ге көбейтіп 3-ші жолға қосамыз, сонда:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ аламыз. Ендеше } r(A) = 2 \text{ болады.}$$

2.2. Сызықты алгебралық теңдеулер жүйесін шешудің бірнеше әдістері

Мысал-1:
$$\begin{cases} 5x - y - z = 0 \\ x + 2y + 3z = 14 \\ 4x + 3y + 2z = 16 \end{cases} \text{ жүйенің шешімін табайық.}$$

Бұл жүйені шешу үшін белгісіздердің коэффициент-терінен құралған анықтауыштың мәнін табуымыз керек:

$$\begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 20 - 12 - 3 + 8 + 2 - 45 = -30 \neq 0$$

Ендеше, жоғарыдағы жүйенің шешімін (5) және (6) теңдіктері бойынша табамыз:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 14 & 2 & 3 \\ 16 & 3 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{-30}{-30} = 1 \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 1 & 14 & 3 \\ 4 & 16 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{-60}{-30} = 2$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 14 \\ 4 & 3 & 16 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{-90}{-30} = 3$$

Сонымен берілген теңдеулер жүйесінің шешімі:

$$x = 1, y = 2, z = 3$$

Мысал-1. Матрица әдісімен төмендегі теңдеулер жүйесінің шешімін табу керек:

$$\begin{cases} 5x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 14 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 16 \end{cases}$$

Шешуі: Алдымен A , B және X матрицаларын жазайық:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 0 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

$$\text{мұндағы } |A| \neq 0 \text{ және } AX = \begin{pmatrix} 5x_1 - x_2 - x_3 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 \end{pmatrix}$$

Енді A матрицасының кері матрицасын анықтайық. Сонда берілген жүйе төмендегі түрге келеді.

$$A^{-1} = -\frac{1}{30} \begin{pmatrix} -5 & -1 & -1 \\ 10 & 14 & -16 \\ -5 & -19 & 11 \end{pmatrix}$$

Анықталған A^{-1} матрицаны B матрицаға көбейтіп, іздестіріп отырған X матрицаны табамыз:

$$X = A^{-1} \cdot B = -\frac{1}{30} \begin{pmatrix} -5 & -1 & -1 \\ 10 & 14 & -16 \\ -5 & -19 & 11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Сонымен, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$ - берілген жүйенің шешімдері болады.

Сызықты алгебралық теңдеулер жүйесін шешудің үшінші бір әдісі айнымалыны біртіндеп жою арқылы жүргізілетін *Гаусс әдісі* болып табылады.

Басқаша айтқанда, берілген теңдеулер жүйесінің кеңейтілген матрицасына эквивалентті үшбұрышты матрица аламыз.

Сонымен берілген теңдеулер жүйесін шешу үшін осы жүйенің кеңейтілген матрицасына элементар түрлендірулер жасау арқылы алынған үшбұрышты матрицаға сәйкес алынған жүйенің шешімдерін тапсақ болғаны.

Мысал-2. Теңдеулер жүйесін Гаусс әдісін пайдаланып шешіңіздер:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 6 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases}$$

Бұл теңдеулер жүйесін шешу үшін жоғарыдағы қадамдарды рет-ретімен орындап шығу керек.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A/B = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & -3 & 2 & -8 \end{array} \right) \rightarrow \begin{matrix} I \cdot (-2) + II \\ I + III \cdot (-2) \end{matrix}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & -8 \\ 0 & 3 & 0 & 6 \end{array} \right) \xrightarrow{II + III} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & -8 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{array} \right)$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ 3x_2 - 2x_3 = -8 \\ -2x_3 = -2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3x_2 = -6 \\ x_2 = 2 \\ 2x_1 = 0, \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 1 \end{cases}$$

Өзіндік жұмысқа арналған тапсырмалар

1. $A = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ матрицалары берілген. $2A - 3B$ -

табыңыздар.

2. Екінші ретті анықтауыштарды есептеңіздер.

a) $A = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}$ b) $B = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -10 \end{vmatrix}$

г) $C = \begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & \sin x \end{vmatrix}$ d) $D = \begin{vmatrix} \sqrt{a} & -1 \\ a & \sqrt{a} \end{vmatrix}$

3. Үшінші ретті анықтауыштарды есептеңіздер.

a) $A = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 6 & -2 & 0 \end{vmatrix}$ b) $B = \begin{vmatrix} 2 & 7 & 2 \\ -1 & -3 & 5 \\ 6 & 3 & 4 \end{vmatrix}$ г) $C = \begin{vmatrix} a & 1 & a \\ -1 & a & 1 \\ a & -1 & a \end{vmatrix}$

4. Анықтауыштарды ықшамдап есептеңіздер.

a) $A = \begin{vmatrix} a & -a & a \\ a & a & -a \\ a & -a & -a \end{vmatrix}$ b) $C = \begin{vmatrix} 12 & 6 & -4 \\ 6 & 4 & 4 \\ 3 & 2 & 8 \end{vmatrix}$ г) $B = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & -4 & 7 \\ -3 & 12 & -15 \end{vmatrix}$

5. Тепе-теңдікті дәлелдеңіздер.

a) $\begin{vmatrix} \frac{x_1 + x_2}{2} & \frac{y_1 + y_2}{2} & 1 \\ x_1 - x_2 & y_1 + y_2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$

АНАЛИТИКАЛЫҚ ГЕОМЕТРИЯ

1-мысал. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ - әртүрлі нольдік емес векторлар, егер $\vec{a}$ векторы $\vec{c}$ векторына перпендикуляр болмаса, онда $\vec{a}$ және $\vec{b} + \alpha \vec{c}$ векторлары өзара перпендикуляр болатындай α саны табылатынын дәлелдеңіз.

Шешуі. $\vec{a}$ және $\vec{b} + \alpha \vec{c}$ векторлары перпендикуляр болу үшін $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \alpha \vec{c}) = 0$, яғни $\vec{a} \cdot \vec{b} + \alpha \vec{a} \cdot \vec{c} = 0$ шарты орындалуы керек. Есептің шартынан: $\vec{a} \cdot \vec{c} \neq 0$, сонда $\alpha = -\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\vec{a} \cdot \vec{c}}$.

Өзіндік жұмысқа арналған тапсырмалар

1. $\vec{a}(2; 3), \vec{b}(1; -3), \vec{c}(-1; 3)$ векторлары берілген. α - ның қандай мәнінде $\vec{p} = \vec{a} + \alpha \vec{b}$ және $\vec{q} = \vec{a} + 2\vec{c}$ векторлары өзара коллинеар?

2. $\vec{a}(1; 2; 3), \vec{b}(1; -1; 1), \vec{c}(\alpha; \alpha + 1; 1)$. α параметрінің қандай мәнінде берілген векторлар коллинеар?

3. $A_1B_1C_1$ және $A_2B_2C_2$ үшбұрыштардың медианаларының қиылысуы M_1 және M_2 нүктелері.

$\overline{M_1M_2} = \frac{1}{3}(\overline{A_1A_2} + \overline{B_1B_2} + \overline{C_1C_2})$ дәлелдеңіз.

4. ABCD тетраэдрі төбелерімен берілген:

$A(1; 2; 0), B(0; 1; 2), C(1; 2; 3), D(-1; 1; -1)$. Көлемін есептеңіз.

5. Үш вектор берілген:

$$\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}, \vec{b} = \vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}, \vec{c} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k}.$$

Келесі шарттарды $\vec{x} \cdot \vec{a} = -5, \vec{x} \cdot \vec{b} = -11, \vec{x} \cdot \vec{c} = 20$ қанағаттандыратын $\vec{x}$ векторын табу керек.

6. SABC үшбұрышты пирамиданың $\vec{SA} = \vec{a}, \vec{SB} = \vec{b}, \vec{SC} = \vec{c}$ векторлары берілген. O нүктесін ABC үшбұрыштың центрі деп алып $\vec{SO}$ векторын табыңыз.

7. $\vec{a}$ векторы O_x және O_y координаттың осьтерімен $\alpha = 60^\circ, \beta = 120^\circ$

бұрыш жасайды. $|\vec{a}| = 2$ болса, онда оның координаталары қандай?

8. ABC үшбұрыштың қабырғалары $\overrightarrow{AB} = (2, 6, -4)$ және $\overrightarrow{AC} = (4, 2, -2)$ векторларымен берілген. C төбесінен жүргізілген медианасымен беттесетін $\overrightarrow{CD}$ векторының ұзындығын табыңыз.

9. Егер $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 2$, $(\vec{a}, \vec{b}) = -\frac{\pi}{3}$ болса, онда $4\vec{a}\vec{b} - 3\vec{a}^2 + 0,5\vec{b}^2$ өрнегінің мәні қандай?

10. Егер $\vec{a}\{1; -2; 0\}$; $\vec{b}\{0; 3; -6\}$; $\vec{c}\{-2; 3; 1\}$ болса, онда $\vec{\rho} = 2\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b} + \vec{c}$ векторының координаталарын табыңыз.

1.1. Кесіндіні берілген қатынаста бөлу. Екі нүктенің ара қашықтығы. Нүктенің координаталарын түрлендіру

1-мысал. Ұштары $A(1; 2)$ және $B(4; 8)$ нүктелерінде жататын кесіндіні тең үш бөлікке бөлетін нүктелерді табыңыз.

Шешуі. Айталық, C және D есептің шешімдері болсын. Сонда C нүктесі AB бағытталған кесіндіні $1:2$ қатынаста бөледі (немесе BA бағытталған кесіндіні $2:1$ қатынаста бөледі десе болады).

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$$

формулаларын пайдаланып $x = 2$, $y = 4$ табамыз, яғни $C(2; 4)$.

D нүктесі $\overrightarrow{AB}$ бағытталған кесіндіні $\lambda = 2$ қатынаста бөледі. Сонда $D(3; 6)$ болады.

2-мысал. ABC үшбұрышы төбелерімен берілген: $A(3; 3)$, $B(-2; 3)$, $C(0; 3 - \sqrt{7})$. A бұрышынан жүргізілген биссектрисасының табанының координаталарын табыңыз.

Шешуі. A бұрыштың биссектрисасының табанын D деп белгілейік.

Биссектрисаның қасиеті бойынша D нүкте BC кесіндіні $\lambda = \frac{AB}{AC}$

қатынаста бөледі. $AB = \sqrt{(-2-3)^2 + (3-3)^2} = 5$, $AC = 4$.

$$\text{Осыдан } x = \frac{-2 + \frac{5}{4} \cdot 0}{1 + \frac{5}{4}} = -\frac{8}{9}, \quad y = \frac{3 + \frac{5}{4}(3 - \sqrt{7})}{1 + \frac{5}{4}} = 3 - \frac{5}{9}\sqrt{7}.$$

Сонымен $D\left(-\frac{8}{9}; 3 - \frac{5}{9}\sqrt{7}\right)$

3-мысал. ABCD – параллелограм, ал диагоналдарының қиылысу нүктесі О. $R = A\overline{e_1} \overline{e_2}$ және $R' = O\overline{e_1} \overline{e_2}$ - екі аффиндік координаталар жүйелері, мұндағы $\overline{e_1} = \overline{AB}, \overline{e_2} = \overline{AD}, \overline{e'_1} = \overline{OD}, \overline{e'_2} = \overline{AO}$. R' жүйеде $P(2; -3)$ координаталарымен берілген Р нүктенің координаталарын R жүйеде табыңыз.

Шешуі. R жүйеден R' жүйеге нүктенің координаталарын түрлендіру формуласы

$$\begin{cases} x' = c_{11}x + c_{12}y + a \\ y' = c_{21}x + c_{22}y + b \end{cases} \quad (A)$$

түрінде жазылады. Мұндағы $(a; b)$ - жаңа координаталар жүйесінің бас нүктесінің координаталары; $(c_{11}; c_{21})$ - R' жүйедегі бірінші базистік вектордың координаталары; $(c_{12}; c_{22})$ - екінші базистік вектордың R' жүйесіндегі координаталары; $M(x'; y')_R, M(x; y)_{R'}$.

Есептің берілгені бойынша

$$O\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right), \overline{e'_1} = \overline{OD} = \frac{1}{2}(\overline{e_2} - \overline{e_1}), \overline{e'_1} = \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right) \cdot (\overline{e_1}, \overline{e_2})$$

$$\overline{e'_2} = \overline{AO} = \frac{1}{2}(\overline{e_1} + \overline{e_2}), \overline{e'_2} = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right) \cdot (\overline{e_1}, \overline{e_2})$$

Енді (A) формуланы келесі түрде жазуға болады:

$$\begin{cases} x' = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2} \\ y' = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2} \end{cases} \quad (B)$$

(B) формуланы пайдаланып $P(x'; y')_R$ координаталарын табайық:

$$\begin{cases} x' = -\frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot (-3) + \frac{1}{2} = -2 \\ y' = \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot (-3) + \frac{1}{2} = 0 \end{cases}.$$

Сонымен $P(-2; 0)_R$.

Өзіндік жұмысқа арналған тапсырмалар

1. Кесіндінің бір ұшы $A(-1, 2)$, ортасы $B(4, -3)$. Екінші ұшы C -ні табыңыз.
2. ABC үшбұрышының төбелері берілген: $A(4, -3)$, $B(-3, 5)$, $C(2, 7)$. Осы үшбұрыштың медианаларының қиылысу нүктесін табыңыз.
3. AE кесіндісін $B(4, 2)$ және $C(3, 5)$ нүктелері өзара тең үш бөлікке бөледі. A және E нүктелерін табыңыз.
4. Параллелограммның екі іргелес төбелері $A(-3, -4)$, $B(4, -2)$ және диагоналдарының қиылысу нүктесі $E(1, 1)$ берілген. Қалған екі төбесін табыңыз.
5. Төртбұрыштың төбелері берілген: $A(-5, 0)$, $B(5, -2)$, $C(3, 4)$, $D(0, 6)$. Оның диагональдарының қиылысу нүктесін табыңыз.
6. Төбелері $A(9, 2)$, $B(0, 20)$, $C(-15, -10)$ нүктелерінде орналасқан. Үшбұрышты іштей сызылған шеңбердің центрі мен радиусын табыңыз.
7. Абсциссалар өсінің бойынан $A(5, 3)$ нүктесінен 5-ке тең қашықтықта жататын нүктені табыңыз.
8. Ординаталар өсінің бойынан $M(3, 4)$ нүктесіне дейінгі қашықтығы $\sqrt{34}$ -ке тең болатын нүктені табыңыз.
9. Төбелері $M(1, 1)$, $K(3, -4)$, $P(4, 6)$ нүктелері болатын үшбұрыштың ауданын есептеңіз.
10. Ромбының қарама-қарсы екі төбесі $A(5, -3)$, $C(3, 1)$ және қабырғасының ұзындығы $\sqrt{10}$ -ға тең. Осы ромбының ауданы мен биіктігін табыңыз.

1.3. Жазықтықтағы түзу

1-мысал. ABC үшбұрыштың төбелері берілген: $A(8; 4)$, $B(-12; -6)$, $C(-4; -12)$. Осы үшбұрыштың: а) үш қабырғасының; б) B төбесінен жүргізілген медианасының; в) C бұрышының биссектриссасының; г) A төбесінен BC қабырғасына түсірілген биіктігінің теңдеулерін құрыңыз.

Шешуі. а) $AB: \frac{x+12}{20} = \frac{y+6}{10} \Rightarrow x+12=2y+12 \Rightarrow x=2y,$

$$\text{BC: } \frac{x+12}{8} = \frac{y+6}{-6} \Rightarrow 4(y+6) = -3(x+12) \Rightarrow 3x+4y+60=0,$$

$$\text{AC: } \frac{x+4}{12} = \frac{y+12}{16} \Rightarrow -4x+3y+20=0;$$

б) AC кесіндісінің D қақ ортасының координаталарын табайық:

$$x_D = \frac{8+(-4)}{2} = 2; y_D = \frac{4+(-12)}{2} = -4.$$

Осыдан BD медианасының теңдеуі шығады:

$$\frac{x+12}{14} = \frac{y+6}{2} \Rightarrow x+12=7(y+6) \Rightarrow -x+7y+30=0;$$

в) биссектрисаның AB қабырғасымен қиылысу нүктесін E деп белгілейік. Үшбұрыш бұрышының биссектрисасының қасиеті бойынша AE : BE = AC : BC. Сонда

$AC = \sqrt{12^2 + 16^2} = 20, BC = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10,$ E нүкте AB кесіндіні $\alpha = AC : BC = 2$ қатынаста бөледі, сондықтан оның координаталары:

$$x_E = \frac{x_A + \lambda x_B}{1 + \lambda} = \frac{8 + 2(-12)}{1 + 2} = -\frac{16}{3}, y_E = \frac{y_A + \lambda y_B}{1 + \lambda} = \frac{4 + 2(-6)}{1 + 2} = -\frac{8}{3}.$$
 CE

биссектрисасының теңдеуі: $\frac{x+4}{-\frac{4}{3}} = \frac{y+12}{\frac{28}{3}} \Rightarrow 7x+y+40=0;$

г) $\vec{n} = (3; 4)$ векторы BC түзудің нормаль векторы ізделінді биіктіктің бағыттаушы векторы болады, яғни биіктіктің теңдеуі:

$$\frac{x-8}{3} = \frac{y-4}{4} \Rightarrow 4(x-8) = 3(y-4) \Rightarrow -4x+3y+20=0.$$

2-мысал. ABC үшбұрыштың AB: $-3x+5y+2=0$ қабырғасы,

AM: $-3x+4y+1=0$ және BN: $2x+7y-22=0$ биіктіктерінің теңдеулері белгілі. Қалған екі қабырғасымен үшінші биіктігінің теңдеулерін табыңыз.

Шешуі. AM биіктігінің $\vec{n}_1 = (-3; 4)$ нормаль векторы BC түзудің бағыттаушы векторы болады, сондықтан оның теңдеуін

$$4(x-x_B) + 3(y-y_B) = 0$$

түрінде табуға болады.

Алдымен B нүктенің координаталарын табайық:

$$\begin{cases} -3x+5y+2=0 \\ 2x+7y-22=0 \end{cases} \Rightarrow x=4; y=2; B(4;2).$$

BC түзудің теңдеуі: $4x+3y-22=0$.

Енді А нүктесінің координаталарын табайық:

$$\begin{cases} -3x+5y+2=0 \\ -3x+4y+1=0 \end{cases} \Rightarrow y=-1; x=-1; A(-1;-1).$$

BN биіктіктің $\overline{n_2}=(2;7)$ нормальдік векторы AC қабырғасының бағыттаушы векторы болады, сондықтан осы түзудің теңдеуі:

$$\frac{x+1}{2}=\frac{y+1}{7} \Rightarrow 7x+7=2y+2 \Rightarrow 7x-2y+5=0.$$

С төбесінің координаталары:

$$\begin{cases} 4x+3y-22=0 \\ 7x-2y+5=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=6 \end{cases} \Rightarrow C(1;6).$$

CN биіктігінің нормальдік векторы ретінде AB түзудің $\overline{n_3}=(5;3)$ бағыттаушы векторы болғандықтан CN түзудің теңдеуі:

$$5(x-1)+3(y-6)=0 \Rightarrow 5x+3y-23=0 \text{ болады.}$$

3-мысал. Үшбұрыштың төбелері берілген: А (1; -1), В (3; 5), С (-9; 11). Биіктіктерінің ұзындықтарын есептеңіз.

Шешуі. Қабырғаларының теңдеулері:

$$AB: -3x+y+4=0, BC: x+2y-13=0, AC: 6x+5y-1=0.$$

Үшбұрыштың биіктіктерін үшбұрыштың төбелерінен оған қарсы қабырғаларына дейінгі қашықтығы ретінде табамыз:

$$h_a = \frac{14}{\sqrt{5}}; h_b = \frac{42}{\sqrt{61}}; h_c = \frac{42}{\sqrt{10}}.$$

4-мысал. $2x+y-7=0$ түзуіне параллель

$x^2+y^2+10x-2y+6=0$ шеңбердің жанамаларының теңдеулерін табыңыз.

$$\text{Шешуі. } x^2+y^2+10x-2y+6=0 \Rightarrow (x+5)^2+(y-1)^2=20.$$

Шеңбердің центрі О (-5; 1), радиусы $\sqrt{20}$, ал жанамасының теңдеуі $2x+y+c=0$ болсын. Шеңбердің центрінен жанамға дейінгі қашықтық оның радиусына тең:

$$\frac{|2 \cdot (-5) + 1 + c|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \sqrt{20} \Rightarrow |-9 + c| = 10 \Rightarrow \begin{cases} -9 + c = 10 \\ -9 + c = -10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 19 \\ c = -1 \end{cases}.$$

Жанаманың теңдеулері: $2x + y + 19 = 0$ және $2x + y - 1 = 0$.

1.4. Жазықтық

1-мысал. Тікбұрышты декарттық координаталар жүйесінде

$l: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{2}$ түзуі, $\pi: 2x + 3y - z + 1 = 0$ жазықтығы және $M_0(1; 2; 3)$

нүктесі берілген. M_0 нүктесі арқылы өтетін π жазықтығына перпендикуляр және l түзуіне параллель σ жазықтығын табыңыз.

Шешуі. σ жазықтығының теңдеуін $A(x-1) + B(y-2) + C(z-3) = 0$ түрінде жазуға болады. А, В, С коэффициенттерін келесі шарттардан табуға болады:

1) $\vec{n}(A, B, C)$ векторы π жазықтығына параллель, сондықтан оның координаталары $2A + 3B - C = 0$ шартын қанағаттандырады;

2) $\vec{n}(A, B, C)$ векторы $\vec{l}(1; 2; 2)$ векторына перпендикуляр, яғни $A + 2B + 2C = 0$. Осы шарттардан $A = 8$, $B = -5$, $C = 1$.

Сонымен σ жазықтықтың теңдеуі:

$$8(x-1) - 5(y-2) + z - 3 = 0 \Rightarrow 8x - 5y + z - 1 = 0.$$

2-мысал. Аффиндік координаталар жүйесінде $M_0(1; 2; 3)$ нүктесі және $2x - 3y + z - 1 = 0$ теңдеуімен π жазықтығы берілген. M_0 нүктесі арқылы өтетін және π жазықтығына параллель орналасатын α жазықтығын табыңыз. *Шешуі.* α жазықтықтың теңдеуін

$2x - 3y + z + d = 0$ түрінде жазуға болады. M_0 нүктесі осы жазықтықта жатады, яғни $2 \cdot 1 - 3 \cdot 2 + 3 + d = 0$ немесе $d = 1$.

ТАЛДАУҒА КІРІСПЕ

1.1 Жиындар

1-мысал. $|x| = x + 3$ теңдеуін шешу керек.

Шешуі. Модульдің анықтамасы бойынша

$$x = x + 3 \text{ немесе } -x = x + 3.$$

Бірінші теңдеудің мағынасы жоқ. Екінші теңдеуден $x = -\frac{3}{2}$.

2-мысал. Теңсіздікті шешіңіз: $|2x + 5| \geq 7$.

Шешуі. Модульдің қасиеті бойынша $|2x + 5| \geq 7$ теңсіздігі $2x + 5 \geq 7$ және

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x-2}} - \lg(2x-1) \text{ пара-пар. Бірінші теңсіздіктен } x \geq 1, \text{ екіншісінен}$$

$$x \leq -6. \text{ Сонымен, берілген теңсіздіктің шешімі: } x \geq 1, x \leq -6.$$

3-мысал. Теңсіздікті шешіңіз: $|x - 2| < |x + 4|$.

Шешуі. Берілген теңсіздіктің екі жағын квадраттаймыз:

$$(x - 2)^2 < (x + 4)^2 \Rightarrow -12x < 12 \Rightarrow x > -1.$$

Теңсіздік шешімі $x > -1$.

4-мысал. Теңсіздікті шешіңіз: $||x - 3| - 5| > 2$.

Шешуі. Теңсіздіктің екі жағын квадраттаймыз:

$$|x - 3|^2 - 10|x - 3| + 25 > 4.$$

Енді $|x - 3| = y$ алмастыру енгіземіз. Онда теңсіздік мына түрге келеді:

$$y^2 - 10y + 21 > 0 \Rightarrow (y - 3)(y - 7) > 0 \Rightarrow y < 3, y > 7.$$

Есеп мына теңсіздіктер жиынын шешуге келтірілді:

$$|x - 3| < 3, |x - 3| > 7. -3 < x - 3 < 3 \Rightarrow 0 < x < 6$$

$$x - 3 > 7: x - 3 < -7 \Rightarrow x > 10, x < -4.$$

Сонымен, теңсіздік шешуі: $x < -4, 0 < x < 6, x > 10$.

5-мысал. Теңсіздікті шешіңіз: $|x^2 - 3x + 2| \leq 2x - x^2$.

Шешуі. Бұл теңсіздік төмендегі теңсіздіктер жүйелеріне пара-пар:

$$1) \begin{cases} x^2 - 3x + 2 \geq 0, \\ x^2 - 3x + 2 \leq 2x - x^2; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x^2 - 3x + 2 \leq 0, \\ -(x^2 - 3x + 2) \leq 2x - x^2. \end{cases}$$

Осы теңсіздіктер жүйелерін шешеміз:

$$1) \begin{cases} (x-1)(x-2) \geq 0, \\ \left(x - \frac{1}{2}\right)(x-2) \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq 1, x \geq 2, \\ \frac{1}{2} \leq x \leq 2 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{2} \leq x \leq 1.$$

$$2) \begin{cases} (x-1)(x-2) \leq 0, \\ x-2 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow 1 \leq x \leq 2, x \leq 2 \Rightarrow 1 \leq x \leq 2.$$

Бұл шешімдердің бірігуі берілген теңсіздіктің шешімі болады, яғни

$$\frac{1}{2} \leq x \leq 2.$$

6-мысал. Теңсіздікті шешіңіз $x^2 + 2|x| \leq 63$.

Шешуі. $e = |x|$ белгілейміз. Онда

$$y^2 + 2y - 63 \leq 0 \Rightarrow (y-7)(y+9) \leq 0 \Rightarrow \begin{cases} |x| > -9, \\ |x| \leq 7 \end{cases} \Rightarrow -7 \leq x \leq 7.$$

Бірінші теңсіздік кез келген x -тің мәндерінде орынды. Сонымен, берілген теңсіздіктің шешуі $-7 \leq x \leq 7$.

1.3 Функция және оның қасиеттері

1-мысал. $y = \sqrt{x-5}$ функцияның анықталу облысын табыңыз.

Шешуі. Бұл функция $x-5 \geq 0$ теңсіздігін қанағаттандыратын x -тің барлық мәндерінде нақты мән қабылдайды. Демек $x \geq 5$, анықталу облысы $[5, +\infty)$ аралығы.

2-мысал. $y = \frac{2x}{(x-3)(x+5)}$ функцияның анықталу облысын табыңыз.

Шешуі. $x-3 \neq 0$, $x+5 \neq 0$ мәндері нақты шекті мәндер қабылдайды. Демек, $x \neq 3$, $x \neq -5$, ал анықталу облысы $(-\infty; -5) \cup (-5, 3) \cup (3, +\infty)$

3-мысал. $y = \sqrt{9-x^2} + \log(x-1) - \sqrt{x}$ функцияның анықталу облысын табыңыз.

Шешуі. Алдымен әрбір қосылғыш функцияның анықталу облысын табамыз.

- 1) $9-x^2 \geq 0 \Rightarrow |x| \leq 3$, яғни $-3 \leq x \leq 3$;
- 2) $x-1 > 0 \Rightarrow x > 1$ немесе $(1, +\infty)$ аралығы;
- 3) $x \geq 0$ демек $[0, +\infty)$ аралығы.

Берілген функцияның анықталу облысы, осы үш функцияның анықталу облыстарының қиылысуына тең, яғни $(1, 3]$ аралығы болады.

Бірсарынды тізбек және оның шегі. e саны

1-мысал. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2+4}{n^2+1} \right)^n$. Шекті табыңыз.

Шешуі.
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2+4}{n^2+1} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{3}{n^2+1} \right)^{\frac{n^2+1}{3}} \right]^{\frac{3n}{n^2+1}},$$

ал $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n}{n^2+1} = 0$ болғандықтан, $e^0 = 1$, яғни $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2+4}{n^2+1} \right)^n = 1$.

2-мысал. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2+3}{n^2} \right)^{n^2+1}$. Шекті есептеңіз.

Шешуі.
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2+3}{n^2} \right)^{n^2+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{3}{n^2} \right)^{\frac{n^2}{3}} \right]^{\frac{3}{n^2}(n^2+1)}, \text{ ал}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3(n^2+1)}{n^2} = 3 \text{ болғандықтан, } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2+3}{n^2} \right)^{n^2+1} = e^3.$$

3-мысал. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+4}{n+1} \right)^{n^2}$. Шекті есептеңіз.

Шешуі. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+4}{n+1} \right)^{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{3}{n+1} \right)^{\frac{n+1}{3}} \right]^{\frac{3n^2}{n+1}},$ ал

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2}{n+1} = +\infty$ болғандықтан, $e^{+\infty} = +\infty$.

Демек, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+4}{n+1} \right)^{n^2} = +\infty$.

4-мысал. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 1}{5x^2 + 2x}$. Шекті табыңыз.

Шешуі. $\frac{\infty}{\infty}$ - түріндегі анықталмағандық түріндегі жағдай. Бөлшектің

алымымен бөлімін айнымалының ең жоғары дәрежесіне, x^2 -на бөлу тәсілін қолданамыз. Сонымен,

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 1}{5x^2 + 2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 - \frac{1}{x^2}}{5 + \frac{2}{x}} = \frac{3}{5}.$

5-мысал. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{tg} 2x}{\operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{4} - x \right)}$. Шекті табыңыз.

Шешуі. $\frac{\infty}{\infty}$ - түріндегі анықталмағандық түріндегі жағдай. Бөлшекті 0-ге ұмтылатын көбейткішке қысқартуға болатындай тепе-тең түрлендіру жасаймыз:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{tg} 2x}{\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right)} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin 2x \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{\cos 2x \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)} = \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin 2x}{\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)} \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{\cos 2x} = \frac{1}{1} \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)} = \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}{2 \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)} = -\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

$x \rightarrow a, x \rightarrow \infty$ $f(x)$ функциясы екі шексіз аз функциялар қатынасы, $\frac{0}{0}$ - түріндегі анықталмағандық түріндегі жағдай. Бөлшектің алымымен бөлімін, көпмүшелерді, 0-ге айналдыратын көбейткіш $(x-a)$ -ға қысқарту тәсілін қолданамыз.

6-мысал. $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{2x^2 - 11x + 5}{3x^2 - 14x - 5}$. Шекті табыңыз.

Шешуі. $\frac{0}{0}$ - түріндегі анықталмағандық түріндегі жағдай. Бөлшектің алымымен бөлімін, көпмүшелерді, 0-ге айналдыратын көбейткіш $(x-5)$ -ке қысқартамыз. Сонымен,

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{2x^2 - 11x + 5}{3x^2 - 14x - 5} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{2(x-5)\left(x - \frac{1}{2}\right)}{3(x-5)\left(x + \frac{1}{3}\right)} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{2x-1}{3x+1} = \frac{9}{16}.$$

7-мысал. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^5 + 2x^4 + x^2 - 3x - 10}{x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 5x - 2}$. Шекті табыңыз.

Шешуі. $\frac{0}{0}$ - түріндегі анықталмағандық түріндегі жағдай. Бөлшектің алымымен бөлімін, көпмүшелерді, 0-ге айналдыратын көбейткіш $(x+2)$ -ге қысқартамыз. Сонымен,

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^5 + 2x^4 + x^2 - 3x - 10}{x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 5x - 2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^4 + x - 5}{x^3 + 3x - 1} = -\frac{3}{5}.$$

Анықталмағандықтардың $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, түрлерін алгебралық түрлендірулерді қолдану арқылы $\frac{\infty}{\infty}$ немесе $\frac{0}{0}$ түріне келтіріп алып ашады.

1-мысал. $\alpha(x) = x^2$, $\beta(x) = x$. Бұл функциялар $x_0 = 0$ нүктесінде шексіз аздар. Шексіз аздарды салыстырыңыз.

Шешуі. Шексіз аздарды салыстыру үшін олардың қатынасының шегін қарастырамыз:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0,$$

демек $\alpha(x) = x^2$ функциясы $\beta(x) = x$ - кеңіректе $x_0 = 0$ нүктесінде жоғарғы ретті шексіз аз болады.

2-мысал. $\alpha(x) = \sin 2x$, $\beta(x) = x$ функциялары $x_0 = 0$ нүктесінде шексіз аздар. Шексіз аздарды салыстырыңыз.

Шешуі. Шексіз аздарды салыстыру үшін олардың қатынасының шегін

қарастырамыз: $\lim_{x_0 \rightarrow 0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} = 2 \neq 0$. Демек, $\sin 2x$ пен x

функциялары $x_0 = 0$ нүктесінде бірдей ретті шексіз аздар.

1-мысал. Дифференциалдау ережелерін пайдаланып, төмендегі функциялардың туындыларын табу керек. 1) $y = x^2 \sin x \ln x$; 2)

$$y = \operatorname{tg} x + \frac{e^x}{1+x}; \quad 3) y = e^{x^2}.$$

Шешуі.

$$1) y' = (x^2 \sin x \ln x)' = (x^2)' \sin x \ln x + x^2 (\sin x)' \ln x + x^2 \sin x (\ln x)' = \\ = 2x \sin x \ln x + x^2 \cos x \ln x + x \sin x.$$

2)

$$y' = \left(\operatorname{tg} x + \frac{e^x}{1+x} \right)' = (\operatorname{tg} x)' + \left(\frac{e^x}{1+x} \right)' = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{e^x(1+x) - e^x}{(1+x)^2} = \sec^2 x + \frac{xe^x}{(1+x)^2}$$

3) $y = e^{x^2}$ бұл функцияны күрделі функция түрінде жазуға болады:

$$y = e^u, \quad u = x^2,$$

$$\text{онда } y'_x = y'_u \cdot u'_x = (e^u)'_u \cdot (x^2)'_x = 2xe^u \equiv 2xe^{x^2}.$$

2-мысал. $y = \ln \sin \sqrt{\operatorname{arctg} e^{3x^2}}$. Функцияның туындысын табыңыз.

Шешуі. Туындыны күрделі функцияны дифференциалдау формуласы бойынша табамыз:

$$y' = \frac{1}{\sin \sqrt{\operatorname{arctg} e^{3x^5}}} \cos \sqrt{\operatorname{arctg} e^{3x^5}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\operatorname{arctg} e^{3x^5}}} \cdot \frac{1}{1+e^{6x^5}} e^{3x^5} \cdot 15x^4 = \\ = \frac{15x^4 e^{3x^5} \operatorname{ctg} \sqrt{\operatorname{arctg} e^{3x^5}}}{2\sqrt{\operatorname{arctg} e^{3x^5}} (1+e^{6x^5})}.$$

3-мысал. $y = (\sin x)^{\cos x}$ дәрежелі- көрсеткіштік функцияның туындысын тап.

Шешуі. Алдымен бұл теңдіктің екі жағын да логарифмдейміз:
 $\ln y = \cos x \ln \sin x$

Теңдіктің сол жағындағы функция күрделі функция екенін ескеріп дифференциалдаймыз:

$$\frac{1}{y} \cdot y' = (\cos)' \cdot \ln \sin x + \cos x (\ln \sin x)', \\ y' = y(-\sin x \ln \sin x + \operatorname{ctg} x \cos x).$$

Немесе $y' = (\sin x)^{\cos x} (\operatorname{ctg} x \cos x - \sin x \ln \sin x)$.

Функция дифференциалы

1-мысал. Дифференциалды пайдаланып $y = x^3 - 70x^2 + 80$ функциясының x айнымалысының 5-тен 5,01-ге дейін өзгергендегі өзгерісін анықтау керек.

Шешуі. $\Delta x = 5,01 - 5 = 0,01$ аргумент өсімшесіне сәйкес функция өсімшесі

$$\Delta y \approx dy = y'(x) \Delta x = (3x^2 - 140x) \Delta x = (3 \cdot 5^2 - 140 \cdot 5) \cdot 0,01 = 6,25.$$

2-мысал. $\sin 46^\circ$ – тың жуық мәнін табу керек.

Шешуі. $f(x) = \sin x$, $x = 46^\circ$ (1) формула бойынша

$$x_0 = 45^\circ \text{ десек, } \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad (\sin x)' = \cos x, \text{ ал } \Delta x = 1^\circ,$$

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ радиандық өлшемін алу керек.}$$

Сонда, $\sin 46^\circ \approx \sin 45^\circ + \cos 45^\circ \cdot \frac{\pi}{180}$, немесе

$$\sin 46^\circ \approx \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{\sqrt{2}}{2} (1 + 0,01745) = 0,71945$$

(таблица бойынша $\sin 46^\circ = 0,71934$).

3-мысал. $y = f(x) = \sqrt[3]{65}$ – тің жуық мәнін табу керек.

Шешуі. $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $x=65$ болғандағы мәні. Мына формуланы пайдаланамыз:

$$\sqrt[n]{A^n + a} \approx A + \frac{a}{nA^{n-1}}, \quad A = 4, \quad a = 1, n = 3;$$

$$\sqrt[3]{65} = \sqrt[3]{64 + 1} \approx 4 + \frac{1}{3 \cdot 4^2} = 4 + \frac{1}{48} = 4,0208.$$

Жаттығулар

Функциялардың дифференциалдарын табыңыз (291-296):

$$291. \sin x - x \cos x + 4.$$

$$292. x \arctg x - \ln \sqrt{1+x^2}.$$

$$293. x \ln x - x + 1.$$

$$294. x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} - 3.$$

$$295. y = a \cos(3x+5).$$

$$296. x\sqrt{a^2-x^2} + a^2 \arcsin \frac{x}{a} - 5.$$

Функциялардың жуық мәнін табыңыз (297-301):

$$297. \arcsin 0,05.$$

$$298. \arctg 1,04.$$

$$299. \ln 1,2.$$

$$300. \sqrt[3]{25}.$$

$$301. e^{x^2-x}, x=1,2.$$

2.4 Жоғары ретті туындылар және дифференциалдар Жоғары ретті туындылар

1-мысал. $f(x) = \sin^2 x$ функциясының x нүктесіндегі екінші ретті туындысын табыңыз.

Шешуі. $f'(x) = 2 \sin x \cdot \cos x = \sin 2x,$

$$f''(x) = (\sin 2x)' = 2 \cos 2x.$$

2-мысал. $y = a^x, a > 0$ функциясының n – ретті туындысын табу керек.

Шешуі. $y' = a^x \ln a, y'' = a^x \ln^2 a, \dots, y^{(n)} = a^x \ln^n a.$

$y = e^x$ болса, онда $y^{(n)} = e^x.$

3-мысал. Айталық, $y = \sin x$ болсын, $y^{(n)} = ?$

Шешуі. $y' = \cos x, y'' = -\sin x, y''' = -\cos x, y^{(IV)} = \sin x.$

$$\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \text{ теңдігі пайдаланып, } y' = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$y'' = -\sin x = \sin\left(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2}\right), \quad \text{т.с.с.}$$

$$y^{(n)}(x) = \sin\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right).$$

Дәл осылай $y = \cos x$ функциясының $y^{(n)}$ туындысы табылады:

$$y^{(n)}(x) = \cos\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right).$$

4-мысал. $y = \ln x, (x > 0)$. $y^{(n)}(x) = ?$

Шешуі. $y' = \frac{1}{x}, \dots,$

$$y^{(n)} = \left(\frac{1}{x}\right)^{n-1} = (-1)(-2)\dots(-n+1)x^{-n} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}.$$

Сонымен, $(\ln x)^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}.$

Лопиталь ережесі

1-мысал. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\operatorname{ctg} x - \frac{1}{x} \right)$ шегін табу керек.

Шешуі Алдымен анықталмағандықтың қайсы түрі болатынын анықтау керек:

Өрнекті түрлендіреміз:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\operatorname{ctg} x - \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x \sin x} = \left| \frac{0}{0} \right|.$$

Енді Лопиталь ережесін (1-теорема) пайдаланамыз,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x \cos x - \sin x)'}{(x \sin x)'} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - x \sin x - \cos x}{\sin x + x \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x \sin x}{\sin x + x \cos x} = \left| \frac{0}{0} \right| =$$

$$= - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x \sin x)'}{(\sin x + x \cos x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + \cos x \cdot x}{2 \cos x + x \sin x} = 0.$$

2-мысал. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \sin ax}{\ln \sin bx}$ шегін табу керек.

Шешуі. Бұл $\left| \frac{\infty}{\infty} \right|$ түріндегі анықталмағандық. 2 теорема бойынша:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \sin ax}{\ln \sin bx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{actg} ax}{b \operatorname{ctg} bx} = \frac{a}{b} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} bx}{\operatorname{tg} ax} = \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1.$$

3-мысал. $\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}}$. Шекті табу керек.

Шешуі. $\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}} = \left| 1^\infty \right|$ түріндегі анықталмағандық. $y = x^{\frac{1}{1-x}}$

белгілеп, өрнектің екі жағын логарифмдейміз,

$$\ln y = \frac{1}{1-x} \ln x, \text{ егер } x \rightarrow 1, \quad \frac{\ln x}{1-x} = \left| \frac{0}{0} \right|.$$

Лопиталь ережесін пайдаланамыз:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \ln y = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{1-x}, \quad \ln \lim_{x \rightarrow 1} y = -\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x} = -1,$$

$$\ln y = -1, \quad y = e^{-1}, \quad \lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}} = e^{-1}.$$

2.8 Ойыстық, дөңестік және иілу нүктелері. Асимптоталар

1-мысал. $f(x) = y = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2 + 12$ функцияның иілу нүктелерін табу керек.

Шешуі. Функция $(-\infty, \infty)$ анықталған. Екінші ретті туындысын тауып 2-ші текті кризистік нүктелерді анықтаймыз:

$$\begin{aligned} y'(x) &= 12x^3 - 24x^2 + 12x, \quad y''(x) = 36x^2 - 48x + 12 = \\ &= 12(3x^2 - 4x + 1), \quad 3x^2 - 4x + 1 = 0, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

ұл нүктелер функцияның анықталу обылысын үш интервалға бөледі:

Б

$\left(-\infty, \frac{1}{3}\right), \left(\frac{1}{3}, 1\right), (1, +\infty)$. Осы аралықтардағы екінші ретті

туындының таңбасын анықтайық:

x	$-\infty < x < \frac{1}{3}$	$\frac{1}{3} < x < 1$	$1 < x < +\infty$
$y''(x)$	+	-	+

Бұл кестеден $x = \frac{1}{3}$ мен $x = 1$ иілуі нүктелері болатынын көреміз.

$\left(\infty, \frac{1}{3}\right)$ мен $(1, +\infty)$ аралықтарында функция графигі ойыс, себебі

бұл аралықтарда $y''(x) > 0$, ал $\left(\frac{1}{3}, 1\right)$ аралығында $y''(x) < 0$ болғандықтан график дөңес.

2-мысал. $f(x) = \frac{x^2 - 6x + 3}{x - 3}$ функция графигінің асимптоталарын табыңыз.

Шешуі. Функция сан өсіндегі $x = 3$ нүктесінен басқа нүктелерде анықталған: $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 6x + 3}{x - 3} = \infty$ болғандықтан $x = 3$ функция графигінің вертикаль асимптотасы болады. Көлбеу асимптотасын анықтайық:

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 - 6x + 3}{x^2 - 3x} = 1,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{x^2 - 6x + 3}{x - 3} - x \right] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3 - 3x}{x - 3} = -3.$$

Көлбеу асимптота $y = x - 3$. Горизонталь асимптотасы жоқ.

2.9 Туынды көмегімен функцияны зерттеу, оның графигін салу

Функцияны зерттеу, графигін салу сұлбасы:

1. Функцияның анықталу облысын табу;
2. Үзіліссіздікке зерттеу;
3. Графиктің координаталық осьтерімен қиылысу нүктелерін табу;
4. Функцияны жұптыққа, тақтыққа зерттеу;
5. Периодтылыққа зерттеу;
6. Функцияның өсу (кему) аралықтарын, экстремум нүктелерін табу;
7. Иілу нүктелерін және ойыстық, дөңестік аралықтарын табу;
8. Графиктің асимптоталарын табу;
9. Графиктің бірнеше нүктесін табу;
10. Кесте құру;
11. Графикті салу.

Сұлбаны функцияның берілуіне байланысты ыңқайлап қолданамыз.

Мысал. $y = \frac{2}{x + \sqrt{x^2}}$ функциясын зерттеп, графигін салыңыз.

Шешуі. Сұлба бойынша функцияны зерттеп, графигін салайық.

1. Функцияның анықталу облысы - $(0, +\infty)$ аралығы, оны түрлендіріп

$y = \frac{1}{x}$ түрінде қарастырған ыңғайлы;

2. $(0, +\infty)$ аралығында үзіліссіз. $\lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{1}{x + \sqrt{x^2}} = +\infty$, сондықтан,

$x=0$ нүктесінде оңжақтық үзіліс бар;

3. Координаталық осьтерімен қиылыспайды, себебі $x \neq 0$, $y \neq 0$;

4. Жалпы түрдегі функция;

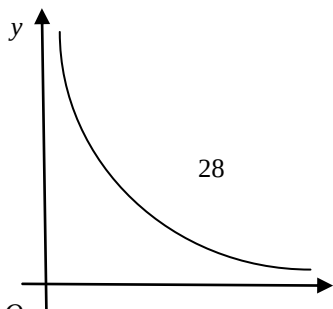
5. Функция анықталу облысында бірсарынды кемімелі, себебі

$y' = -\frac{1}{x^2} < 0$, экстремум нүктелері жоқ;

6. Функция графигі ойыс, себебі $y'' = \frac{2}{x^3} > 0$;

7. $x=0$ - вертикаль асимптота, ал $y=0$ - горизонталь асимптота;

8. Функция графигі 1-ші ширекте орналасқан теңбүйірлі гипербола тармағы.



Сурет 1.

3.1 Анықталмаған интеграл және оның қасиеттері. Тікелей интегралдау, жіктеу және айнымалыны дифференциал таңбасына алу әдістері

1-мысал. $\int (3x^2 + 5x^4 - 1)dx$. Интегралды есептеңіз.

Шешуі.

$$\int (3x^2 + 5x^4 - 1)dx = 3 \int x^2 dx + 5 \int x^4 dx - \int dx = x^3 + x^5 - x + C.$$

2-мысал. $\int \frac{x^2 + 3x - 4}{\sqrt{x}} dx$. Интегралды есептеңіз.

Шешуі.

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 + 3x - 4}{\sqrt{x}} dx &= \int \frac{x^2}{\sqrt{x}} dx + 3 \int \frac{x}{\sqrt{x}} dx - 4 \int \frac{dx}{\sqrt{x}} = \\ &= \int x^{\frac{3}{2}} dx + 3 \int x^{\frac{1}{2}} dx - 4 \int x^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} + 3 \cdot \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \\ &- 4 \cdot 2x^{\frac{1}{2}} + C = \frac{2}{5} \sqrt{x^5} + 2\sqrt{x^3} - 8\sqrt{x} + C. \end{aligned}$$

3-мысал. $\int \frac{x^2}{1+x^2}$. Интегралды есептеңіз.

Шешуі.

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2}{1+x^2} dx &= \int \frac{(x^2+1)-1}{x^2+1} dx = \\ &= \int \left(dx - \frac{dx}{1+x^2} \right) = \int dx - \int \frac{dx}{1+x^2} = x - \operatorname{arctg} x + C.\end{aligned}$$

4-мысал. $\int \frac{(8x-3)}{2\sqrt{4x^2-3x+1}} dx$. Интегралды есептеңіз.

Шешуі.

$$\int \frac{(8x-3)dx}{2\sqrt{4x^2-3x+1}} = \int \frac{d(4x^2-3x+1)}{2\sqrt{4x^2-3x+1}} = \int \frac{d(\sqrt{4x^2-3x+1})}{\sqrt{4x^2-3x+1}} = \sqrt{4x^2-3x+1} + C.$$

3.2 Негізгі интегралдау әдістері

1. Айнымалыны алмастыру әдісі.

1. Бөліктеп интегралдау әдісі.

1-мысал. $\int \cos^4 x \sin x dx$. Интегралды алмастыру әдісімен табыңыз.

$$\begin{aligned}\int \cos^4 x \sin x dx &= \left| \begin{array}{l} t = \cos x \\ dt = -\sin x dx \end{array} \right| = \\ &= -\int t^4 dt = -\frac{t^5}{5} + C = -\frac{\cos^5 x}{5} + C.\end{aligned}$$

2-мысал. $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx$. Интегралды алмастыру әдісімен табыңыз.

Шешуі.

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \left| \begin{array}{l} x = a \sin t \quad t = \arcsin \frac{x}{a} \\ dx = a \cos t dt \end{array} \right| = \int \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t} \cdot$$

$$\cdot a \cos t dt = a^2 \int \cos^2 t dt = \frac{a^2}{2} \int (1 + \cos 2t) dt = \frac{a^2}{2} \left(t + \frac{\sin 2t}{2} \right) + C =$$

$$= \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{a^2}{4} 2 \sin t \cos t + C = \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{1}{2} x \sqrt{a^2 - x^2} + C.$$

Бөлшек-рационал функцияларды интегралдау

Бөлшек-рационал функцияларды интегралдау үшін, оны белгісіз коэффициенттер әдісін қолданып элементар бөлшектерге жіктеу керек.

Мысал. $\int \frac{(3x^2 + 8)dx}{x^3 + 4x^2 + 4x}$. Интегралды табыңыз.

Шешуі. Дұрыс рационал бөлшекті элементар қосылғыш бөлшектерге жіктейміз:

1) Бөлімін көбейткіштерге жіктейміз:

$$x^3 + 4x^2 + 4x = x(x^2 + 4x + 4) = x(x + 2)^2;$$

2) Бөлшек-рационал функцияларды белгісіз коэффициенттер әдісін қолданып элементар бөлшектерге жіктейміз:

$$\frac{3x^2 + 8}{x(x + 2)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x + 2} + \frac{C}{(x + 2)^2};$$

3) $x(x + 2)^2$ өрнегіне теңдіктің екі жағын көбейту арқылы бөлімдерден құтыламыз:

$$3x^2 + 8 = A(x + 2)^2 + Bx(x + 2) + Cx = (A + B)x^2 + (4A + 2B + C)x + 4A;$$

4) Теңдіктің екі жағындағы x -тің бірдей дәрежелерінің коэффициенттерін теңестіріп теңдеулер жүйесін аламыз:

$$\begin{cases} A + B = 3, \\ 4A + 2B + C = 0, \\ 4A = 8; \end{cases}$$

5) Теңдеулер жүйесін шешеміз: $A = 2, B = 1, C = -10$. Табылған коэффициенттер мандерін орындарына қоямыз:

$$\frac{3x^2 + 8}{x(x + 2)^2} = \frac{2}{x} + \frac{1}{x + 2} - \frac{10}{(x + 2)^2}.$$

Мұнан,

$$\int \frac{(3x^2 + 8)dx}{x^3 + 4x^2 + 4x} = \int \left(\frac{2}{x} + \frac{1}{x + 2} - \frac{10}{(x + 2)^2} \right) dx = 2 \ln|x| + \ln|x + 2| + \frac{10}{x + 2} + C.$$

Анықталған интеграл.

Ньютон-Лейбниц формуласы. Интегралдау әдістері

Айталық, $y = f(x)$ функциясы $[a, b], (a < b)$ кесіндісінде анықталсын.

$$I_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i, \text{ мұнда } a = x_0 < x_1 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_n = b,$$

$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, - интегралдық қосынды.

Анықтама. Интегралдық қосындының $\Delta x_i \rightarrow 0$ шегін $f(x)$ функциясынан $[a, b]$ кесіндісі бойынша алынған *анықталған интеграл* деп атайды.

$$\text{Сонда, } \int_a^b f(x) dx = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i.$$

$$\text{Ньютон-Лейбниц формуласы: } \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Анықталған интегралда айнымалыны алмастыру формуласы:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt.$$

Анықталған интегралда бөліктеп интегралдау формуласы:

$$\int_a^b u dv = [u v]_a^b - \int_a^b v du, \text{ мұнда } u(x), v(x) \text{ функциялары } [a, b] \text{ -}$$

сегментінде дифференциалданатын функциялар.

Мысал-1. $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{2}{1+x^2} dx$. Интегралды есептеңіз.

Шешуі. $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{2}{1+x^2} dx = 2 \arctg x \Big|_0^{\sqrt{3}} = 2 \arctg \sqrt{3} - 2 \arctg 0 = \frac{2\pi}{3}.$

Мысал-2. $\int_2^4 \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^4} dx$. Интегралды есептеңіз.

Шешуі.

$$\int_2^4 \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x^4} dx = \left| \begin{array}{l} x = 2 \sec t, \quad dx = \frac{2 \sin t}{\cos^2 t} dt; \\ \alpha = 0, \quad \beta = \frac{\pi}{3} \end{array} \right| = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{4 \sec^2 t - 4}}{16 \sec^4 t} \frac{2 \sin t}{\cos^2 t} dt =$$

$$= \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 \cos t \, dt = \frac{1}{12} \sin^3 t \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{32}.$$

Мысал-3. $\int_1^3 4x e^{2x} dx$. Интегралды есептеңіз.

Шешуі.

$$\int_1^3 4x e^{2x} dx = \left| \begin{array}{l} u = x, \quad du = dx, \\ dv = 2e^{2x} dx, \quad v = e^{2x}. \end{array} \right| = 2xe^{2x} \Big|_1^3 -$$

$$- \int_1^3 e^{2x} d2x = 6e^6 - 2e^2 - e^{2x} \Big|_1^3 = 5e^6 - e^2.$$

Жаттығулар

Интегралдарды есептеңіз (508-532):

508. $\int_0^1 (\sqrt{x} + \sqrt[3]{x^2}) dx.$

509. $\int_1^8 \frac{2 + 5\sqrt[3]{x}}{x^3} dx.$

510. $\int_2^9 \sqrt[3]{x-1} dx.$

511. $\int_1^2 \frac{1}{2x-1} dx.$

512. $\int_0^{\pi/4} \sin^2 x dx.$

513. $\int_0^1 \frac{1}{4x^2 + 4x + 5} dx.$

514. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}} dx.$

515. $\int_3^4 \frac{x^2 + 3}{x - 2} dx.$

$$516. \int_{-2}^{-1} \frac{x+1}{x^3 - x^2} dx.$$

$$518. \int_1^e \frac{1}{x(1 + \ln^2 x)} dx.$$

$$520. \int_2^3 \frac{1}{x^2 - 2x - 8} dx.$$

$$522. \int_0^2 \frac{2x-1}{2x+1} dx.$$

$$524. \int_0^1 \ln(x+1) dx.$$

$$526. \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} dx.$$

$$528. \int_0^{\pi/2} x \cos x dx.$$

$$530. \int_0^1 x(2-x^2)^{12} dx.$$

$$532. \int_0^1 \arccos x dx.$$

$$517. \int_1^e \frac{\cos(\ln x)}{x} dx.$$

$$519. \int_0^{\pi/2} \cos^3 x dx.$$

$$521. \int_{3/4}^2 \frac{1}{\sqrt{2+3x-2x^2}} dx$$

$$523. \int_0^1 \frac{x^2+3x}{(x+1)(x^2+1)} dx.$$

$$525. \int_1^3 \frac{1}{x+x^2} dx.$$

$$527. \int_0^1 \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx.$$

$$529. \int_0^{\pi/2} \sin x \cos^2 x dx.$$

$$531. \int_0^{\ln 2} x e^{-x} dx.$$

IV АЛГЕБРА ЖӘНЕ САНДАР ТЕОРИЯСЫ

1. Жиындар мен математикалық логиканың элементтері

Жиын математикадағы анықтама берілмейтін алғашқы ұғымдардың бірі. Жиын ұғымын мысалдар келтіру арқылы ғана түсіндіруге болады.

Мысалы: сыныптағы оқушылар; әртүрлі геометриялық фигуралар, т.с.с.

Жиындарды латынның бас әріптерімен $A, B, C, \dots$ ал оның элементтерін кіші $a, b, c, \dots$ әріптерімен белгілейміз.

Анықтама: A мен B жиындарының бірігуі деп, $A \cup B$ арқылы жазылатын A немесе B жиынында жататын элементтердің жиынын айтамыз, яғни:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ немесе } x \in B\}$$

Мысалы: $A = \{x \mid x = 2y; y \in Z\}$ жұп бүтін сандар, ал $B = \{x \mid x = 5y; y \in Z\}$ үштің еселіктері болсын. Сонымен бұл жиындардың бірігуін төмендегідей көрсетуге болады:

$$A \cup B = \{z \mid z = 2x \text{ немесе } z = 5x, x \in Z\}.$$

Анықтама: A мен B жиындарының қиылысуы деп, $A \cap B$ арқылы жазылатын A жиынында да B жиынында да жататын элементтердің жиынын айтамыз, яғни:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ және } x \in B\}.$$

Мысалы: 3 және 4 сандарына еселік болатын A мен B жиындарының қиылысуын төмендегідей түрде көрсетуге болады:

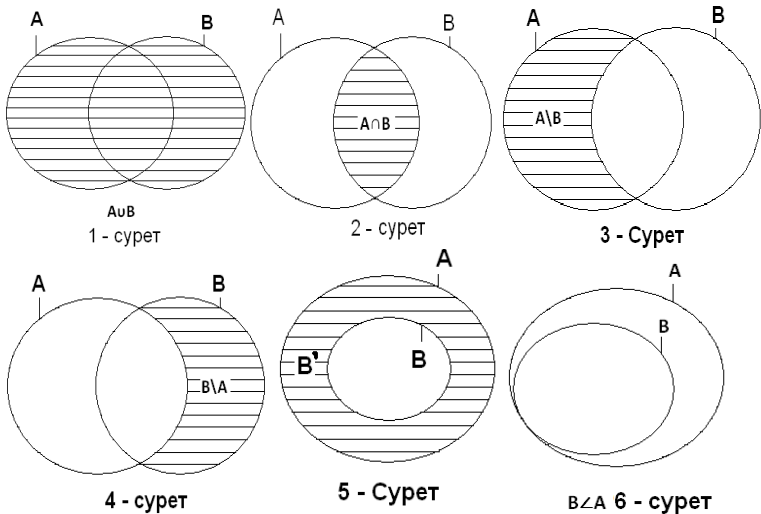
$$A \cap B = \{x \mid x = 12y, y \in Z\}.$$

Анықтама: A мен B жиындарының айырымы деп, A жиынында жататын, B жиынында жатпайтын элементтердің жиынын айтамыз және $A \setminus B$ арқылы белгілейміз. Сонда: $A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ және } x \notin B\}$.

Мысалы: $A = \{3; 5; 7; 4; -2\}$ және $B = \{-2; 8; 7; 9; 6; \sqrt{5}\}$ берілсе, онда олардың айырымы: $A \setminus B = \{3; 5; 4\}$.

Анықтама: B жиыны A жиынының ішкі жиыны болса, онда B жиынының толықтырушы жиыны деп, A жиынының B жиынында жатпайтын элементтерінің жиынын айтамыз. Оны $\overline{B}$ арқылы белгілейміз. $\overline{B} = \{x \mid x \in A \text{ және } x \notin B\}$. Мысалы: A -тік төртбұрыштар жиыны, ал B

квадраттар жиыны болса, онда $\overline{B}$ - квадрат болмайтын тік төртбұрыштар жиыны болады.



1.1. Пікірлер және оларға қолданатын амалдар

Математикадағы алғашқы ұғымдардың бірі пікір болып табылады.

Анықтама: Мағынасы ақиқат немесе жалған болатыны анық хабаршы сөйлемдерді пікірлер дейміз.

Мысалы: $7 < 8$ (ақиқат); Тең қабырғалы үшбұрыштардың барлық бұрыштары 60° (ақиқат); $2 \cdot 3 = 8$ (жалған). т.с.с.

Пікірді әдетте латынның бас әріптерімен A, B, C белгілейді.

Анықтама: Бастапқы ақиқат пікірге қолданғанда жалған, ал бастапқы жалған пікірге қолданғанда ақиқат болатын бинарлық операция терістеу операциясы деп аталады. Терістеу « $\neg$ » символымен белгіленеді. Ақиқат пікір үшін ақиқаттық кестесі құрылады.

Анықтама: егер A, B екі пікірі үшін қолданғанда, екеуі де ақиқат болғанда ақиқат, ал қалған жағдайларда жалған пікір пайда болатын

бинарлық операция конъюнкция деп аталады. $A \wedge B$, A және B деп оқылады.

Конъюнкция $< \wedge >$ символмен белгіленеді, «және» деген мағынаны білдіреді.

A	B	$A \wedge B$
a	a	a
a	жс	жс
жс	a	жс
жс	жс	жс

Анықтама: Пікірлерге қолданғанда біреуі ақиқат, екіншісі жалған болғанда жалған, ал қалған жағдайларда ақиқат болатын бинарлық операция импликация деп аталады.

Импликация немесе логикалық салдар белгілеуі « $\rightarrow$ », оқылуы – «шығады».

A	B	$A \rightarrow B$
a	a	a
a	жс	жс
жс	a	a
жс	жс	a

Анықтама: Пікірлерге қолданғанда екі пікірде ақиқат немесе жалған болғанда ақиқат, басқа жағдайларда жалған болатын бинарлық операция эквивалентті пікір деп аталады

Эквиваленттік немесе логикалық мәндес белгілеуі « $\leftrightarrow$ » оқылуы – «эквивалентті».

A	B	$A \leftrightarrow B$
a	a	a
a	жс	жс
жс	a	жс
жс	жс	a

Мысалы: A дегеніміз $2 < 3$ (ақиқат), B -дегеніміз дөңгелек деген квадрат. $A \wedge B$ - (жалған).

Анықтама: Берілген p және q пікірлерінің дизъюнкциясы деп - p, q қатарынан жалған пікір болғанда ғана жалған болатын, ал басқа жағдайларда ақиқат болатын жаңа пікірді айтамыз. $p \vee q$ арқылы белгілеміз және ол p немесе q деп оқылады.

p	q	$p \vee q$
a	a	a
a	жс	a
жс	a	a
жс	жс	жс

Ақиқаттық таблицасын құрғанда, есептеуді жеңілдету үшін, формуланың кейбір бөліктеріне бағаналар арнаймыз. Оларға формуланың бөлігінің мәндерін жазамыз.

Мысалы: $\neg (P_1 \vee P_2) \wedge P_3$ формуласының ақиқаттық кестесін толтыралық:

P_1	P_2	P_3	$\neg (P_1 \vee P_2)$	$\neg (P_1 \vee P_2) \wedge P_3$
a	a	a	жс	жс
a	a	жс	жс	жс
a	жс	a	жс	жс
a	жс	жс	жс	жс
жс	a	a	жс	жс
жс	a	жс	жс	жс
жс	жс	a	a	a
жс	жс	жс	a	жс

Кестеден берілген формуланың тавтология болмайтындығын көреміз.

Өзіндік жұмысқа арналған тапсырмалар

1. A -жазықтағы паралеллограммдар жиыны болсын.

A - жиыны 1) ромб, 2) трапеция 3) тіктөртбұрыштар жиынының ішкі жиыны бола ма?

2. A арқылы 8 ден үлкен 18 ден кем барлық натурал сандар жиынын, ал B арқылы 7-мен аяқталатын натурал сандар жиынын белгілейік. 12, 17, 0, 3, 7, 16, 13 сандары берілген жиындардың қайсысына жатады.

3. x -нақты сандар жиынына жатады деп қарап, а) $7x + 5 = 7(x + 12)$ б) $2(x - 5) = 3x$ в) $x^2 + 3 = 2$ теңдеулерінің шешімдерінің жиынын табыңыздар.

4. A -тік бұрышты ромбылар, B -квадраттар, C -қабырғалары өзара тең тік төртбұрыштар және D -тік төртбұрыштар жиыны болсын. Аталған жиындардың өзара теңдерін анықтаңыздар?

5. $A = \{1, 21, 121, 15, 52, 512\}$ жиынының $B = \{16; 2, 5\}$
 $C = \{1; 21; 15\}$ және $D = \{21; 15; 52\}$ ішкі жиындар бола ма?

а) $A = \{a; b; c; d; e\}; B = \{f; d; a; m\};$

б) $A = \{x \mid x \in N; x < 10\}; B = \{x \mid x \in N; x \leq z\}$

в) $A = \{x \mid x \in N; x\}$ — екі таңбалы натурал сандар

6. а) «3 саны 523 санының бөлгіші»;

ә) « $18 : (7 - 7)$ анықталмайды»;

б) «Кез келген нақты сан $6x - 14 = 0$ -теңдеуінің түбірі»;

в) «Диagonalдары өзара тең параллелограм табылады» деген пікірлердің терістемелерін анықтаңыздар.

7. « $2 \cdot 4 = 8$ » және « $-5 = 25$ » пікірлері берілген. Олардың конъюнкциясын анықтап, ақиқат немесе жалған екенін көрсетіңіздер.

8. «Мен кітап сатып алдым», «мен Қазақстанды араладым» және «мен спорт жарысына қатыстым» пікірлеріне сәйкес A, B және C арқылы белгілейік.

а) $A \wedge B$; ә) $A \wedge B \wedge C$;

б) $A \wedge \neg C$; в) $\neg(A \wedge B)$;

г) $\neg B \wedge \neg C$ пікірлерін оқып, қабылдайтын мәндерін табыңыздар.

9. а) 36 санының квадрат түбірі 6-ға немесе -6-ға тең.

ә) 29 жай сан немесе 29 құрама сан.

б) Бүгін күн ашық немесе бұлыңғыр деген пікірлерінің дизъюнкциясы екенін анықтап, олардың ақиқат немесе жалған екенін көрсетіңіздер.

10. а) «Егер 48 саны 8-ге бөлінсе, онда ол 4-ке де бөлінеді»;

ә) «Егер $-3 < 2$ болса, онда $3^2 = 6$ »;

б) «Егер $4 \cdot 2 = 8$ болса, онда қойдың төрт аяғы болады» деген күрделі пікірлердің құрамындағы элементар пікірлерді анықтап, берілген пікірлердің қабылдайтын мәндерін табыңыздар.

11. $B = \{x \mid x \in N\}$ — жетімен аяқталатын натурал сандар $A \cap B$ мен $A \cup B$ жиындарын табыңыздар.

12. A мен B жиындарының бірігу және қиылысу жиындарын анықтап, оларды сан өсінде көрсетіңіздер.

$$\text{а) } A = \{x \mid x \in Z; x \geq -2\}; B = \{x \mid x \in Z; x \leq 8\}$$

$$\text{б) } A = \{x \mid x \in R; x \geq -2\}; B = \{x \mid x \in R; x \leq 8\}$$

13. $p = \{x \mid x \in N; x \geq 20\}; Q = \{x \mid x \in N; x < 20\}; x$ – жұп сандар. $S = \{x \mid x \in N, x < 20\}$ – үштік еселіктер жиындары берілген. $p \cap Q \cap S$ – жиынының элементтерін табыңыздар.

14. A арқылы 482527 санының, ал B арқылы 5283824 санының цифрларының жиынын белгілейік. $A \cup B$ және $A \cap B$ жиындарын табыңыздар.

$$15. A = \{x \mid x \in R; -1 \leq x \leq 2\}; B = \{x \mid x \in R; 0 \leq x \leq 4\}$$

жиындарының бірігуі мен қиылысуын табыңыздар.

$$16. A = \{x \mid x \in R; -1 \leq x \leq 2\}; B = \{x \mid x \in R; 0 \leq x \leq 4\};$$

$C = \{x \mid x \in R; -2 \leq x \leq 0\}$ жиындары берілген.

$$\text{а) } A \cup B; \text{ә) } A \cup C; \text{б) } B \cup C; \text{б) } A \cup B \cup C;$$

$$\text{г) } A \cap B \cap C \text{ - жиындарын табыңыздар.}$$

$$17. \text{а) } A = \{11; 12; 43; 54; 7\}; B = \{7; 12\};$$

ә) $A = \{x \mid x \in N; x \leq 10\}; B = \{x \mid x \in N; x \leq 5\}$ жиын-дары берілген. B жиынының A жиынына дейін толықтаушы жиынын табыңыздар.

$$18. \text{а) } \langle 3 \text{ саны } 523 \text{ санының бөлгіші} \rangle;$$

$$\text{ә) } \langle 18 : (7 - 7) \text{ анықталмайды} \rangle;$$

$$\text{б) } \langle \text{Кез келген нақты сан } 6x - 14 = 0 \text{ - теңдеуінің түбірі} \rangle;$$

г) «Диagonальдары өзара тең параллелограм табылады» деген пікірлердің терістемелерін анықтаңыздар.

19. « $2 \cdot 4 = 8$ » және « $-5 = 25$ » пікірлері берілген. Олардың конъюнкциясын анықтап, ақиқат немесе жалған екенін көрсетіңіздер.

20. «Мен кітап сатып алдым», «мен Қазақстанды араладым» және «мен спорт жарысына қатыстым» пікірлеріне сәйкес A , B және C арқылы белгілейік.

$$\text{а) } A \wedge B; \text{ә) } A \wedge B \wedge C;$$

$$\text{б) } A \wedge \neg C; \text{в) } \neg(A \wedge B);$$

$$\text{г) } \neg B \wedge \neg C \text{ пікірлерін оқып, қабылдайтын мәндерін табыңыздар.}$$

$$21. \text{а) } 36 \text{ санының квадрат түбірі } 6\text{-ға немесе } -6\text{-ға тең.}$$

$$\text{ә) } 29 \text{ жай сан немесе } 29 \text{ құрама сан.}$$

б) Бүгін күн ашық немесе бұлыңғыр деген пікірлерінің дизъюнкциясы екенін анықтап, олардың ақиқат немесе жалған екенін көрсетіңіздер.

22.а) «Егер 48 саны 8-ге бөлінсе, онда ол 4-ке де бөлінеді»;

ә) «Егер $-3 < 2$ болса, онда $3^2 = 6$ »;

б) «Егер $4 \cdot 2 = 8$ болса, онда қойдың төрт аяғы бо-лады» деген күрделі пікірлердің құрамындағы элементар пікірлерді анықтап, берілген пікірлердің қабылдайтын мәндерін табыңыздар.

23. «729 саны 9-дың еселігі» және «729 санының цифрларының қосындысы 9-дың еселігі» пікірлерін сәйкес A және B арқылы белгілейік.

а) $A \wedge B$; ә) $A \wedge B \wedge C$; б) $A \wedge \neg C$ пікірлерін оқып, олардың қабылдайтын мәндерін анықтаңыздар.

24. «Бүгін күн ашық», «Бүгін қар жауып тұр», «Мен хат жаздым» және «Бүгін күн дүйсенбі» деген пікірлерді сәйкес A, B, C және D арқылы белгілейік.

а) $A \wedge D$; ә) $A \wedge \neg B$; б) $A \wedge B \wedge C$; в) $A \vee B$

г) $B \Rightarrow C$; ғ) $C \Leftrightarrow D$; д) $(A \wedge B) \Rightarrow D$ деген күрделі пікірлерін оқып, олардың ақиқат немесе жалған екенін анықтаңыздар.

25.а) $-7 \in Q$; ә) $-7 \in Z$;

б) $-7 \in R$; в) $\frac{3}{4} \in Q$;

г) $\frac{3}{4} \in R$; ғ) $1 \in N$; д) $12 \in Z$;

е) $\frac{1}{2} \in Q$ пікірлерін оқып, олардың ақиқат немесе жалған екенін анықтаңыздар.

26. а) $x + 5 = 1$; ә) $x + 2 = 2 + x$; б) $x^2 + 1 = 0$ предикаттарының анықталу облыстарын табыңыздар.

27. Анықталу облыстары R және R_4 жиындары болатын $9x^2 - 4 = 0$ және $3x^2 - 2 < -11$ предикаттарының ақиқаттық таблицасын толтырыңыздар.

28. Анықталу облысы $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ жиыны болатын « x – жұп сан» деген предикатын $A(x)$ арқылы белгілейік.

Кестені толтырыңыздар, мұндағы p - жай сан

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$A(p)$												

29. а) $(\forall x \in R) x - 1 = x$;

ә) $(\forall x \in R) x^2 = 4$;

б) $(\forall x \in R) x - 1 \neq x$;

ө) $(\exists x \in R) x^2 = 4$

пікірлерін оқып, олардың ақиқат немесе жалған екенін анықтаңыздар.

30. Натурал сандар жиыны анықталу облысы болатын « x – жұп сан» және « x – саны 4-тің еселігі» предикаттарын сәйкес A және B арқылы белгілейік.

а) $(\forall x \in N, A(x))$; ә) $(\exists x \in N, B(x))$ пікірлерлерін оқып, олардың ақиқат немесе жалған екенін анықтаңыздар.

31. $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ жиыны анықталу облысы болатын « x – жай сан» және « $x > 3$ » предикаттарын сәйкес $A(x)$ және $B(x)$ арқылы белгілейік. Осы предикаттардың ақиқаттық кестесін толтырыңыздар.

32. $X = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ жиынында анықталған « $x - 1 > 0$ » және « x – үштің еселігі» предикаттарын сәйкес $A(x)$ және $B(x)$ арқылы белгілейік. Олардың ақиқат болатын мәндерін анықтап, Эйлер-Венн диаграммасын салыңыздар.

33. Төмендегі сөйлемдердің ішінен екі орынды предикаттарды көрсетіңіздер:

а) № X анықтама Y студентке берілген;

ә) A қаласы D дариясының жағасында орналасқан;

б) Қандай өзен Каспий өзеніне құяды?

в) 2 саны x санының бөлгіші.

34. $X = \{0, 1, 2, 3, -1, -2, -3\}$ жиынында анықталған $x^2 + y^2 = 4$ предикаты берілген. Оның ақиқат пікірлерге айналатын x пен y айнымалыларының мәндерін табыңыздар.

Пайдаланылған әдебиеттер тізімі:

1. Айдос Е.Ж. Жоғары математика. –Алматы: «Бастау», 2010, 1,2,3 кітап.
2. Александров А.Д., Нецветаев Н.Р. Геометрия.- М.:Наука, 1990.
3. Бияров Т. Н., Молдабеков М. М.Элементар математика есептерінің жинағы - Алматы : Кітап, 1992. - 347 с.
4. Евсюк С.Л. Математика. –М., Книжный дом, 2006. -556 с.
5. Кудрявцев Л.Д. Краткий курс математического анализа. –М.: Физмат-лит, 2002
6. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Аналитическая геометрия. –М.: Наука, 1988.
7. Исақов М., Кулқашева М. Аналитикалық геометрия есептері мен жаттығулары. –А.: 1985.
8. Рашбаев С. Аналитикалық геометрия. -А. 1996.
9. Рябушко А.П.и др. Индивидуальные задания по высшей математике Ч.1, Ч.2., Минск «Вышэйшая школа», 2002
10. Темірғалиев Н. Математикалық талдау, 1-2 бөлімдер.-Алматы: Мектеп, 1987
11. Шойынбеков К.Д., Әбілқасымова А.Е., Есенова М.И., Тұрлыханова М.А. Анализ бастамалары. Оқу құралы. –А.: Білім, 2002
12. Цыпкин А.Г., Пинский А.И. Справочник по методам решения задач –М.: «Наука», 2009, -576 с.